



TITLE:

# 代数曲面の対数的i種数について (代数多様体の分類: 80年代へ)

AUTHOR(S):

倉本, 義之; 角田, 秀一郎

---

CITATION:

倉本, 義之 ...[et al]. 代数曲面の対数的i種数について (代数多様体の分類: 80年代へ). 数理解析研究所講究録 1980, 392: 64-73

ISSUE DATE:

1980-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104957>

RIGHT:

# 代数曲面の対数的 $i$ 種数について

東大 理 倉本義之  
東大 理 角田秀一郎

$S$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義された非特異代数曲面とする。 $S$  の非特異完備化  $\bar{S} \supset S$  を  $D = \bar{S} - S$  が  $\bar{S}$  上の正規交叉型因子となるようにとる。 $S$  の対数的  $i$  種数  $\bar{P}_i(S)$ , 対数的小平次元  $\bar{\kappa}(S)$  は次のように定義される:

$\bar{P}_i(S) = \dim H^0(\bar{S}, i(K_{\bar{S}} + D))$ ,  $\bar{\kappa}(S) = \bar{\kappa}(K_{\bar{S}} + D, S)$ .  
これらは  $\bar{S}$ ,  $D$  のとり方によらずに定まる。([1]) とくに  $\bar{P}_1(S) = \bar{P}_g(S)$  とかき対数的種数という。

ここでは次の問題を考える。

問題  $\bar{\kappa}(S) \geq 0 \Rightarrow \bar{P}_i(S) \geq 1$  なる  $S$  によらない最小の  $i$  を求めよ。

$S$  がコンパクトのときは  $i=12$  でよいことはよく知られている。

前半では  $S$  の対数的不正則数  $\bar{\delta}(S) = \dim H^0(\bar{S}, \Omega_{\bar{S}}^1(\log D))$  が正である場合を考える。このとき次の結果が成り立つ。

定理1  $\bar{\kappa}(S) \geq 0$ ,  $\bar{g}(S) \geq 1$  ならば,  $\bar{P}_2(S) \geq 1$  (詳しくは  $\bar{P}_4(S) \geq 1$  または  $\bar{P}_6(S) \geq 1$ ) である。

$\bar{g}(S) \geq 1$  とすると,  $S$  の quasi-Albanese 写像  $\alpha: S \rightarrow BC\tilde{A}_S$  が考えられる。ここに  $\tilde{A}_S$  は  $S$  の quasi-Albanese variety,  $B$  は  $\alpha(S)$  の  $\tilde{A}_S$  内での closure とする。  $\dim B = 2$  ならば  $\bar{P}_2(S) \geq 1$  となるので  $\dim B = 1$  としてよい。このとき,  $B$  は非特異で  $\bar{\kappa}(B) \geq 0$  であり,  $\alpha$  の一般ファイバーは既約である。(quasi-Albanese 写像については [2] を参照)  $\bar{\kappa}(S) \geq 0$  だから  $\bar{\kappa}(\alpha$  の一般ファイバー)  $\geq 0$  である。そこで, 定理1を示すためには次の定理を示せばよいことがわかる。

定理2  $f: S \rightarrow \Delta$  を非特異代数曲面  $S$  から非特異代数曲線  $\Delta$  への全射正則写像とし, その一般ファイバーは既約とする。  $\bar{\kappa}(\Delta) \geq 0$ ,  $\bar{\kappa}(f$  の一般ファイバー)  $\geq 0$  とすると,  $\bar{P}_4(S) \geq 1$  または  $\bar{P}_6(S) \geq 1$  である。

以下定理2の証明の概要を述べる。

$f$  の一般ファイバーを  $C_w$  とかく。  $S, \Delta$  の非特異完備化  $\bar{S}, \bar{\Delta}$ , 全射正則写像  $\bar{f}: \bar{S} \rightarrow \bar{\Delta}$  を次の図式が可換になるようにとる。

$$\bar{f}: \bar{S} \rightarrow \bar{\Delta}$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$f: S \rightarrow \Delta$$

一般に  $\overline{P}_i(S) \geq P_i(\overline{S})$  であるから, コンパクトな場合の結果により,  $\overline{S}$  が線織面または有理曲面の場合を考えればよい。従って,  $\overline{f}$  の一般ファイバーを  $\overline{C}_w$  とすれば,  $\kappa(\overline{C}_w) = -\infty$  または  $\kappa(\overline{\Delta}) = -\infty$  の場合を考えればよい。そこで  $\kappa(\overline{C}_w)$ ,  $\kappa(\overline{\Delta})$ ,  $\overline{S}$  の不正則数  $g(\overline{S})$  の値に応じたいくつかの場合に分けて考える。まず各場合の結果をまとめておく。

$$\textcircled{1} \quad \kappa(\overline{C}_w) = -\infty, \kappa(\overline{\Delta}) = -\infty \Rightarrow \overline{P}_2(S) \geq 1.$$

$$\textcircled{2} \quad \kappa(\overline{C}_w) = -\infty, \kappa(\overline{\Delta}) = 0 \Rightarrow \overline{P}_2(S) \geq 1.$$

$$\textcircled{3} \quad \kappa(\overline{C}_w) = -\infty, \kappa(\overline{\Delta}) = 1 \Rightarrow \overline{P}_3(S) \geq 1.$$

$$\textcircled{4} \quad \kappa(\overline{C}_w) \geq 0, \kappa(\overline{\Delta}) = -\infty, g(\overline{S}) \geq 1 \Rightarrow \overline{P}_3(S) \geq 1.$$

$$\textcircled{5} \quad \kappa(\overline{C}_w) = 0, \kappa(\overline{\Delta}) = -\infty, g(\overline{S}) = 0 \Rightarrow \overline{P}_3(S) \geq 1 \text{ または } \overline{P}_4(S) \geq 1.$$

$$\textcircled{6} \quad \kappa(\overline{C}_w) = 1, \kappa(\overline{\Delta}) = -\infty, g(\overline{S}) = 0 \Rightarrow \overline{P}_4(S) \geq 1 \text{ または } \overline{P}_6(S) \geq 1.$$

$\kappa(C_w) \geq 0, \kappa(\Delta) \geq 0$  であるから,  $\kappa(\overline{C}_w) = -\infty$  のとき  $C_w \subset \mathbb{C}^*$  即ち  $(D, \overline{C}_w) \geq 2$  であり,  $\kappa(\overline{\Delta}) = -\infty$  のとき  $\Delta \subset \mathbb{C}^*$  即ち  $D \supset (\overline{f}$  の 2 本のファイバーの support) である。

補題 1  $\overline{S}$  上に第一種例外曲線  $E$  があって  $(K_{\overline{S}} + D, E) \leq 0$  なるとき,  $E$  の flow down を  $\mu: \overline{S} \rightarrow \widehat{S}$  とし  $\widehat{S} = \overline{S} - \mu_* D$  とすれば,  $\mu_* D$  は  $\widehat{S}$  上の正規交叉型因子であって,  $\overline{P}_i(S) = \overline{P}_i(\widehat{S})$  となる。

証明は容易である。

特に  $D \nsubseteq E$ ,  $(D, E) = 1$  のとき  $\bar{S}$  を  $S$  の半点除去といい、  
 $D \subset E$ ,  $(D-E, E) = 2$  のとき  $\mu$  を canonical flow down とい  
う。

$\bar{p}_2(S)$  については次の公式がある。

補題 2  $\bar{p}_2(S) = \sum_{i=1}^r \pi(D_i) + h(\Gamma(D)) + (p_2(S) - g(S) + t)$  .

ここに,  $D = \sum_{i=1}^r D_i$  を既約分解とし  $\pi(D_i) = \frac{1}{2}(D_i, D_i + K_{\bar{S}}) + 1$ ,

$h(\Gamma(D))$  は  $D$  の dual graph  $\Gamma(D)$  の輪状数,

$t = \dim(\text{kernel of } H^1(\bar{S}, \mathcal{O}_{\bar{S}}) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D))$  である。

( [3] 参照 )

以下 ① ~ ⑥ の各場合について論ずる。

①  $\kappa(\bar{C}_w) = -\infty$ ,  $\kappa(\Delta) = -\infty$  のとき,  $F_1, F_2$  をその support  
が  $D$  に含まれる 2 本のファイバーとし,  $D$  の子に関する  
horizontal component を  $H$  とする。  $\bar{p}_2(S) = 0$  とすると補題  
2 により  $D$  の各成分は  $P^1$  であって  $\Gamma(D)$  はサイクルを含まない。  
よって  $H$  は既約である。また  $(D, \bar{C}_w) \geq 2$  であるから,  $F_1$  及  
び  $F_2$  の  $H$  と交わる既約成分は重覆度 2 以上である。以上のこ  
とと補題 1 による reduction を用いて  $\bar{p}_2(S) \geq 1$  が示される。

②  $\kappa(\bar{C}_w) = -\infty$ ,  $\kappa(\Delta) = 0$  のとき, 補題 2 により  $D$  が既  
約楕円曲線である場合に帰着される。  $d = \deg(f|_D: D \rightarrow \Delta)$   
とおくと,  $\kappa(\bar{C}_w) \geq 0$  であるから  $d \geq 2$  である。  $d = 2$  のと

きは,  $\pi_D: D \rightarrow \Delta$  によって 2 重不分岐被覆  $\widehat{S} \rightarrow \overline{S}$  をつくることにより,  $\overline{P}_2(S) \geq 1$  がわかる。  $d \geq 3$  のときは,  $\overline{S}$  の極小モデル  $\widehat{S}$ , 固有双有理正則写像  $\mu: \overline{S} \rightarrow \widehat{S}$  を考える。

$\mu = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \cdots \circ \mu_r$ ,  $\mu_i: \overline{S}_i \rightarrow \overline{S}_{i-1}$  は  $\mu_i(E_i) = P_i$  なる flow down となっているとする。  $\mu_* D$  の  $\overline{S}_{i-1}$  への proper transform の  $P_i$  における重覆度を  $\nu_i$  とすると, 補題 1 による reduction によって  $\nu_i \leq d-2$  としてよいことがわかる。  $\widehat{S}$  において Riemann-Roch を用いて  $\dim H^0(\widehat{S}, m(K_{\widehat{S}} + \mu_* D))$  を計算し,  $\nu_i$  の評価とあわせて  $\overline{P}_2(S) \geq 1$  が出る。

③  $\kappa(\overline{C}_w) = -\infty$ ,  $\kappa(\Delta) = 1$  のとき, 補題 2 と Hurwitz の公式から容易に  $\overline{P}_2(S) \geq 1$  が出る。

④  $\kappa(\overline{C}_w) \geq 0$ ,  $\kappa(\Delta) = -\infty$ ,  $g(\overline{S}) \geq 1$  のとき, 補題 2 より容易に  $\overline{P}_2(S) \geq 1$  が出る。なおこの case は, 定理 1 を示すためには考えなくてよい。

⑤  $\kappa(\overline{C}_w) = 0$ ,  $\kappa(\Delta) = -\infty$ ,  $g(\overline{S}) = 0$  のとき,  $\pi: \overline{S} \rightarrow \Delta$  は有理楕円曲面である。  $\pi$  の 2 つのファイバー  $F_1, F_2$  に対して,  $D = \text{supp } F_1 + \text{supp } F_2$  となる場合を考えればよい。楕円曲面の理論 ([4], [5]) を用いれば, このとき  $\overline{P}_2(S) = 0$  となるのは次の 3 つの場合しかないことがわかる。各場合について実例が存在する。

Case 1.  $F_1, F_2$  は III\* 型と II 型。

このとき,  $\overline{P}_2(S) = \overline{P}_3(S) = 0$ ,  $\overline{P}_4(S) = 1$ ,  $\overline{P}_6(S) = 2$ ,  $\kappa(S) = 1$  となる。

Case 2.  $F_1, F_2$  は  $IV^*$  型と III 型。

このとき,  $\overline{P}_2(S) = 0$ ,  $\overline{P}_3(S) = 1$ ,  $\overline{P}_6(S) = 2$ ,  $\kappa(S) = 1$  となる。

Case 3.  $F_1, F_2$  は  $IV^*$  型と II 型。

このとき,  $\overline{P}_2(S) = 0$ ,  $\overline{P}_3(S) = 1$ ,  $\overline{P}_6(S) = 2$ ,  $\kappa(S) = 1$  となる。

⑥  $\kappa(C_w) = 1$ ,  $\kappa(\Delta) = -\infty$ ,  $g(S) = 0$  のとき,  $\kappa(C_w) = 1$  であるから加法公式により  $\kappa(S) \geq 1$  となる。 $\kappa(S) = 1$  のときは, 一般論において得られている  $\overline{P}_i(S)$  の公式 ([6] (2.3)~(2.8)) を適用することにより,  $\overline{P}_4(S) \geq 1$  または  $\overline{P}_6(S) \geq 1$  がわかる。 $\kappa(S) = 2$  のときは次の定理による。

定理 3  $\kappa(S) = 2$ ,  $D$  の intersection matrix が negative definite でないならば,  $\overline{P}_4(S) \geq 1$  または  $\overline{P}_6(S) \geq 1$  である。

⑥ の場合  $D$  は  $F$  のファイバーの support を含んでいるので定理 3 の仮定が満たされている。定理 3 の証明は本稿の後半にある。

## 文献

- [1] Iitaka, S., On logarithmic Kodaira dimension of algebraic varieties, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, IWANAMI, Tokyo, 1977.
- [2] Iitaka, S., Logarithmic forms of algebraic varieties, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 23 (1976), 525-544.
- [3] Kodaira, K., On compact complex analytic surfaces I, *Ann. of Math.* 71 (1960), 111-152.
- [4] Kodaira, K., On compact analytic surfaces II, III, *Ann. of Math.* 77 (1963), 563-626, 78 (1963), 1-40.
- [5] Kodaira, K., On the structure of compact complex analytic surfaces I, *Amer. J. Math.* 86 (1964), 751-798.
- [6] Kawamata, Y., On the classification of non-complete algebraic surfaces, *Algebraic Geometry, Lect. Note in Math.*, vol. 732, Springer, PP. 215-232 (1979).



定理  $(S, \bar{S}, D)$  を 2次元非特異3対,  $K(S)=2$  とする  
 $D$  の交点行列が負定値でないならば,  $P_4(S) \geq 1$  かつ  $P_6(S) \geq 1$ .

証明. 用語等については [1] 参照

[1] によって,  $(S, \bar{S}, D)$  を相対極小モデルとしてよい.  $K_{\bar{S}}$   
 $\in K$  とかく.  $K+D$  の半正値成分を  $K+D_m$  とかく. [1] によれ  
ば,  $h$  も十分大きくとれば,  $B_S | h(K+D_m) | = \emptyset$ . よって [2]  
により,  $h^1(\bar{S}, nK - [-(n-1)D_m]) = 0$ ,  $n \geq 2$ .

また  $D$  の交点行列が負定値でないことから,  $[D_m] \neq 0$  が従う.

層の完全系列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}(nK - [-(n-1)D_m]) &\rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}(nK - [-(n-1)D_m] + [D_m]) \\ &\rightarrow \mathcal{O}_{[D_m]}((nK - [-(n-1)D_m] + [D_m])|_{[D_m]}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\bar{S}, nK - [-(n-1)D_m]) &\rightarrow H^0(nK - [-(n-1)D_m] + [D_m]) \\ &\rightarrow H^0([D_m], (nK - [-(n-1)D_m] + [D_m])|_{[D_m]}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

をえり, この § の前半の議論により  $\bar{S}$  を有理曲面としてよい。

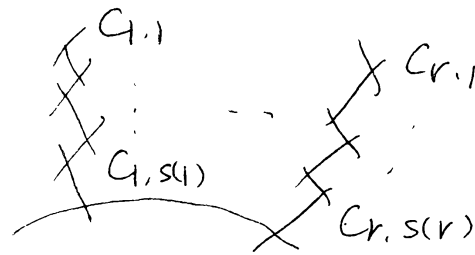
$nK - [-(n-1)D_m] + [D_m] \leq nK + nD$  に注意すれば,

$P_n(S) \neq 0$  をいえるには,  $H^0([D_m], nK - [-(n-1)D_m] + [D_m]|_{[D_m]}) \neq 0$  をいえるといふことがわかる.  $H^0([D_m], nK - [-(n-1)D_m] + [D_m]|_{[D_m]})$  は,  $D$  のグラフを合成することにより,

4 または 6 で非零になることがわかる. 以下でそれを見よう.

まず,  $P_4(S) = 0$  としよう.  $D$  の各既約成分は  $P_i$ ,

$D_i \in D$  の連結成分で、 $D_m$  における係数が 1 になるものを含み  
とし、 $D_{i,m} \in D_m$  における  $D_i$  の成分とする。  $H^0([D_{i,m}], nK$   
 $- [-(n-1)D_m] + [D_m] / [D_{i,m}]) = H^0([D_{i,m}], nK - [-(n-1)$   
 $D_m + [D_{i,m}] / [D_{i,m}]) \neq 0$  を満たすもの、 $D_{i,m}$  を求める。ま  
ず  $D_{i,m}$  の端成分を  $C_{i,1}, \dots, C_{i,r_i}$  とする。  $i=1$  の端成分とす。  
この成分  $E$  で、 $(D-E, E)=1$  となるもの、次に各  $C_{i,1}$  から始  
り始めて、 $C_{i,j}$  ( $1 \leq j \leq s(i)$ ) を下図のようにとる。(か  
ら  $C_{i,s(i)}$  は  $D$  の他の成分と少くとも 3 点で交わる)。



$a_{ij} = -(C_{i,j}^2)$  とおく。  $Fr(X_1, \dots, X_r) / Gr(X_1, \dots, X_r) \in X_1, \dots, X_r$  の  
重分数展開,  $d_{ij} = 1 - Fr_j(a_{i,j+1}, \dots, a_{i,s(i)}) / Fr(a_{i,1}, a_{i,s(i)})$  と  
すれば,  $D_{i,m} = [D_{i,m}] + \sum_{j=1}^{s(i)} (1 - d_{ij}/d_{i0}) C_{i,j}$  と表  
す。( [1] の  $D_m$  の求め方参照 )

よくて、 $C_{i,s(i)}$  の  $D_m$  における係数は、 $1 - \frac{d_{i0}}{d_{i0}}$  となることに  
注意する。  $C_0 \in \mathcal{I}(C_{ij})$  と交わる  $\sum C_{ij}$  に代りてきたもの  $D_i$  の  
既約成分とする。

$$(C_{i,s(i)}, C_0) = \dots = (C_{r,s(r)}, C_0) = 1$$

$$(C_{i+1,s(i+1)}, C_0) = \dots = (C_{r,s(r)}, C_0) = 0$$

$B_1, \dots, B_p \in C_0$  と交わる  $[D_{1,m}]$  の既約成分とする。

このとき,  $K + D_m$  は半正値であるから,  $(K + D_m, C_0) \geq 0$ .

したがって,  $-2 + (1 - \frac{1}{d_{1,0}}) + \dots + (1 - \frac{1}{d_{r,0}}) + p \geq 0$ .

このとき  $\deg_{C_0} (hK - [-(n-1)D_m] + [D_{1,m}] | C_0)$

$$= (hK - [-(n-1)D_m] + [D_{1,m}], C_0) = -2n + np$$

$$- [-(n-1)(1 - \frac{1}{d_{1,0}})] \dots - [-(n-1)(1 - \frac{1}{d_{r,0}})].$$

初等整数論より,  $-2 + (1 - \frac{1}{d_{1,0}}) + \dots + (1 - \frac{1}{d_{r,0}}) + p \geq 0$

から,  $n=4$  または  $n=6$  として  $-2n + np - [-(n-1)(1 - \frac{1}{d_{1,0}})]$

$\dots - [-(n-1)(1 - \frac{1}{d_{r,0}})] \geq 0$ . (したがって,  $H^0(C_0,$

$hK - [-(n-1)D_m] + [D_m] | [D_m]) \neq 0$ .  $H^0([D_m], hK$

$- [-(n-1)D_m] + [D_m] | [D_m]) \neq 0$ . ( $n=4$  または  $n=6$  ではない?)

したがって, 証明の前半の議論から,  $\bar{P}_4(S) \neq 0$  または  $\bar{P}_6(S) \neq 0$  である.

## 文 献

[1] Y. Kawamata, Classification of non-complete algebraic surface, Proc. Japan Acad.

54 133-135 (1978)

[2] ———, On the cohomology of  $\mathbb{Q}$ -Divisors, Proc. Japan Acad. 56 34-35 (1980)